MATHEMATIQUES

Option économique

Mardi 6 mai 1997, de 8h à 12h

EXERCICE 1

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par :

$\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1) a. Étudier cette fonction et dresser son tableau de variations.

b. En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.

2) Étude de la suite (u_n).

a. Montrer que : $\forall n \geq 3$, $1 < u_n < e$.

b. Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.

c. En déduire que (u_n) converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

d. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$; en déduire que $u_n - 1 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

3) Étude de la suite (v_n).

a. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

b. Calculer $f_n(n\ln(n))$ puis montrer que : $\forall n \geq 3$, $n\ln(n) < v_n$.

c. Soit la fonction g, définie par : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $g(x) = x - 2\ln(x)$.

Étudier g et donner son signe. En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $n > 2\ln(n)$.

d. En déduire le signe de $f_n(2n\ln(n))$, puis établir que : $n\ln(n) < v_n < 2n\ln(n)$.

e. Montrer enfin que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} n\ln(n)$.

EXERCICE 2

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $u_n = \dfrac{1}{C_{n+p}^n}$, où p désigne un entier naturel fixé.

1) Montrer que si $p = 0$ ou si $p = 1$, la série de terme général u_n diverge.

On suppose dans toute la suite que p est supérieur ou égal à 2 et on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

2) a. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $(n + p + 2)u_{n+2} = (n + 2)u_{n+1}$.

b. En déduire, par récurrence sur n, que $S_n = \dfrac{1}{p-1}\left[1 - (n+p+1)u_{n+1}\right]$.

3) a. On pose $v_n = (n + p)u_n$. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

b. En déduire que la suite (v_n) converge et que sa limite ℓ est positive ou nulle.

c. Utiliser les résultats précédents pour montrer que la série de terme général u_n converge et donner sa somme en fonction de p et ℓ.

4) On suppose, dans cette question seulement, que $\ell \neq 0$.

a. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $u_n \sim \dfrac{\ell}{n}$

b. En déduire une contradiction avec le résultat de la troisième question.

5) Donner la valeur de ℓ et en déduire, en fonction de p, la somme de la série de terme général u_n.

EXERCICE 3

I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ pour laquelle il existe un entier p supérieur ou égal à 2 tel que $M^p = 0$ et $M^{p-1} \neq 0$.
On définit alors les matrices suivantes :

$\exp(M) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{k!} M^k$, avec la convention $M^0 = I$. $\quad \ln(I + M) = \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} M^k$.

On considère l'ensemble E des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

1) a. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ et donner sa dimension.
   b. Montrer que les matrices de E ne sont pas inversibles.
   c. Montrer que toute matrice non nulle de E n'est pas diagonalisable.

Dans la suite, A désigne une matrice quelconque de E.

2) a. Calculer A^k pour tout k de $\mathbb{N}$.
   b. Exprimer exp(A) et ln(I + A) en fonction de I et A.
3) Montrer que ln[exp(A)] = A.

4) a. Vérifier que ln(I + A) appartient à E.
   b. Montrer que : exp[ln(I + A)] = I + A
5) Montrer que : $\forall m \in \mathbb{N}$, $\exp(mA) = [\exp(A)]^m$.
6) Montrer que exp(A) est inversible et que : $[\exp(A)]^{-1} = \exp(-A)$.
7) Quelle condition doivent vérifier deux matrices A et B de E pour que exp(A + B) = exp(A) exp(B) ?

PROBLÈME

Dans ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Partie I

On effectue des tirages au hasard dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
Un tirage consiste à extraire une boule de l'urne, la boule tirée étant ensuite remise dans l'urne.
On note N la variable aléatoire égale au numéro du tirage au cours duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue auparavant.

1) On note $N(\Omega)$ l'ensemble des valeurs que peut prendre N. Montrer que $N(\Omega) = [\![2, n + 1]\!]$.

2) Montrer que : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(N > k) = \frac{A_n^k}{n^k}$.

Rappel : A_n^k désigne le nombre d'arrangements de k éléments d'un ensemble à n éléments.

3) a. Montrer que : $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $P(N = k) = P(N > k - 1) - P(N > k)$.
   b. Calculer $P(N = n + 1)$ puis en déduire la loi de N.

4) Montrer que l'espérance E(N) de la variable aléatoire N est : $E(N) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_n^k}{n^k}$.

Partie II

Soit X une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, de densité f (nulle sur $\mathbb{R}_-^*$) et de fonction de répartition F. On suppose, de plus, f continue sur $\mathbb{R}^+$.

On pose, pour tout réel x positif, $\varphi(x) = \int_0^x t\, f(t)\, dt$.

1) Montrer, grâce à une intégration par parties, que :

$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \varphi(x) = \int_0^x [1 - F(t)]dt \ - \ x.P(X > x)$.

2) On suppose, dans cette question, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} [1 - F(t)]\, dt$ converge.

a. Calculer $\varphi'(x)$ et en déduire que la fonction φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

b. Montrer que φ est majorée et en déduire que X a une espérance.

c. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leq x.P(X > x) \leq \int_x^{+\infty} t\, f(t)\, dt$.

d. En utilisant le fait que X a une espérance, montrer que $\lim_{x \to +\infty} \int_x^{+\infty} t\, f(t)\, dt = 0$.

En déduire $\lim_{x \to +\infty} x\, P(X > x)$, puis montrer que : $E(X) = \int_0^{+\infty} [1 - F(t)]\, dt$.

Partie III

On considère la fonction F_n, définie par : $\begin{cases} F_n(x) = 0 \ \text{ si } \ x < 0 \\ F_n(x) = 1 - \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n e^{-x} \ \text{ si } \ x \geq 0 \end{cases}$

1) Montrer que F_n est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité T_n.

2) a. Montrer que, pour tout entier naturel k, l'intégrale $I_k = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx$ converge.

b. Montrer que $I_{k+1} = (k + 1)\, I_k$ puis donner la valeur de I_k.

3) En déduire, en utilisant la partie II, que T_n a une espérance et que $E(T_n) = E(N)$.

Partie IV

On considère la déclaration de fonction suivante, rédigée en Turbo-Pascal :

```
Function f (p, q : integer) : real ;
    var j : integer ;
        z : real ;
    begin
        If (p ≤ 0) or (q < 0) then write (' valeurs incorrectes')
        else If (q = 0) or (q = 1) then f := 1 ;
        else begin
        z :=1 ;
        For j := 1 to (q -1) do z := z * ( 1 - j / p) ;
        f := z ;
        end ;
    end;
```

1) Montrer que, si p est un entier naturel non nul et si q est un entier naturel : $f(p, q) = \dfrac{A_p^q}{p^q}$.

2) Utiliser cette déclaration pour écrire un algorithme en Turbo-Pascal donnant la valeur commune de E(N) et $E(T_n)$ lorsque l'utilisateur entre la valeur de n au clavier.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail